Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Dowód

Niech $a_n = \sqrt[n]{n}$. Możemy zapisać to w postaci wykładniczej:

$$a_n = n^{1/n}$$

.

Rozważmy logarytm naturalny z obu stron, co upraszcza analizę:

$$\ln(a_n) = \ln(n^{1/n}) = \frac{\ln n}{n}$$

.

Teraz musimy zbadać granicę $\frac{\ln n}{n}$ przy $n \to \infty$.

Wiemy, że licznik $\ln n$ rośnie nieskończenie wolniej niż mianownik n . Użyjmy reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d}{dn}(\ln n)}{\frac{d}{dn}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

.

Zatem:

$$\ln(a_n) \to 0 \quad \text{przy } n \to \infty$$

.

Aby wyznaczyć granicę a_n , przypomnijmy, że jeśli $\ln(a_n) \to 0$, to $a_n \to e^0 = 1$.

Stąd:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$